

# CONVECTION DE LA CHALEUR DANS UN GAZ EN RÉGIME LAMINAIRE DANS LE CAS D'UN GRADIENT DE PRESSION ET D'UNE TEMPÉRATURE DE PAROI QUELCONQUES

BERNARD LE FUR

Laboratoire d'Aérothermique, Sorbonne, Paris, France

(Received 20 April 1961)

**Résumé**—Une nouvelle transformation généralisant celle d'Illingworth–Stewartson permet de ramener les équations de la couche limite laminaire compressible aux équations de la couche limite incompressible, lorsque les distributions de vitesse extérieure et de température pariétale sont quelconques. Pour cela, on utilise une enthalpie de référence généralisant celle de Monaghan et l'on néglige les termes de gradient de pression dans les équations transformées.

La comparaison entre les résultats obtenus ainsi et ceux de l'intégration des équations complètes dans les cas étudiés par Cohen et Reshotko montre que les profils de vitesse et de température sont presque identiques, tout au moins quand la température pariétale est comprise entre la moitié et le double de la température totale. Lorsque la température pariétale décroît, l'erreur augmente en restant inférieure à 7,3 pour cent, par exemple, pour le coefficient de convection au point d'arrêt dans un écoulement bidimensionnel, le nombre de Prandtl du gaz étant égal à 1.

Lorsque la température de la paroi d'un obstacle quelconque est faible devant la température totale, la densité de flux de chaleur pariétale est donnée par une formule différant légèrement de celle de Lees.

**Abstract**—A new transformation, generalizing Illingworth–Stewartson's, transforms the compressible laminar boundary layer equations to the incompressible boundary layer equations, for any external velocity and wall temperature distributions. For this, a reference enthalpy, generalizing Monaghan's formula, is employed; pressure gradient terms are neglected in the transformed equations.

Comparison between results obtained thus and those obtained by Cohen and Reshotko by integrating the full equations shows that the velocity and temperature profiles are almost identical, at least when the wall temperature lies between half and twice the stagnation temperature. When the wall temperature decreases, the error rises while staying below 7.3 per cent, for example, in computing the heat transfer coefficient at a two-dimensional stagnation point with the gas Prandtl number equal to 1.

When the wall temperature of an arbitrary body is small compared with the stagnation temperature, the heat-transfer rate at the wall is given by a formula differing slightly from that of Lees.

**Zusammenfassung**—Eine neue Transformation, welche die von Illingworth–Stewartson verallgemeinert, gestattet es, die Gleichungen der laminaren, kompressiblen Grenzschicht auf die Gleichungen der inkompressiblen Grenzschicht zurückzuführen bei beliebiger Verteilung der äusseren Geschwindigkeit und der Wandtemperatur. Hierzu wird eine gegenüber Monaghan verallgemeinerte Bezugsenthalpie verwendet; die Terme des Druckgradienten werden in den transformierten Gleichungen vernachlässigt.

Der Vergleich zwischen den so erhaltenen Resultaten und denen der Integration der vollständigen Gleichungen in den von Cohen und Reshotko behandelten Fällen zeigt, dass die Profile der Geschwindigkeit und der Temperatur fast identisch sind, mindestens dann, wenn die Wandtemperatur zwischen der Hälfte und dem Doppelten der Gesamttemperatur liegt. Bei fallender Wandtemperatur wächst der Fehler an, bleibt aber z.B. kleiner als 7,3 % für den Übergangskoeffizienten im Staupunkt einer zweidimensionalen Strömung bei einer Prandtlzahl des Gases von 1.

Wenn die Wandtemperatur eines beliebigen Hindernisses klein ist gegen die Gesamttemperatur, lässt sich die Wärmestromdichte an der Wand durch eine Gleichung wiedergeben, die etwas von der Gleichung nach Lees abweicht.

**Аннотация**—В статье приводится новое обобщенное преобразование Иллингворча–Стюартсона, которое позволяет вывести уравнения ламинарного пограничного слоя для сжимаемого газа из уравнения ламинарного пограничного слоя при любом

распределении внешних пристенных скоростей и температуры. Для этого, в отличие от Монагана, используется обобщенная относительная энтальпия и не учитываются члены градиента давления в преобразованных уравнениях.

Сравнение полученных данных с результатами интегрирования полных уравнений в рассмотренных Кохеном и Решотко случаях показывает, что профили скорости и температуры почти тождественны. С понижением пристеночной температуры погрешность увеличивается, однако остаётся меньше 7,3%, например для коэффициента конвекции в критической точке двумерного потока при числе Прандтля для газа равном 1. Когда температура стенки ниже полной температуры, то плотность потока тепла на стенке может быть выражена уравнением, которое несколько отличается от уравнения Лииса.

### NOTATIONS

$x$ ,	abscisse curviligne prise le long d'un profil ou d'un méridien;	$i$ ,	conditions à l'arrêt en un point quelconque;
$y$ ,	ordonnée prise perpendiculairement à la paroi;	$t$ ,	conditions à l'arrêt à l'extérieur de la couche limite;
$R$ ,	rayon;	$r$ ,	grandeurs de référence;
$u$ ,	composante de la vitesse le long de l'axe des $x$ ;	$f$ ,	conditions à la paroi thermiquement isolée;
$v$ ,	composante de la vitesse le long de l'axe des $y$ ;	1,	première approximation;
$\theta$ ,	température absolue;	$m$ ,	conditions à l'enthalpie moyenne.
$a$ ,	célérité du son;		
$M$ ,	nombre de Mach;	Indices supérieurs	
$\rho$ ,	masse volumique;	(*)	grandeurs transformées par la nouvelle transformation;
$\psi$ ,	fonction de courant;	(~)	grandeurs transformées par la transformation de Cohen et Reshotko;
$\mu$ ,	viscosité;	( $\cdot$ )	grandeurs correspondant à l'équation de l'énergie sans second membre.
$\nu$ ,	viscosité cinématique;		
$\tau$ ,	tension de frottement;		
$\lambda$ ,	coefficient de conductibilité;		
$c_p$ ,	chaleur spécifique à pression constante;		
$\gamma$ ,	rapport des chaleurs spécifiques;		
$h$ ,	enthalpie massique;		
$\Phi_p$ ,	densité de flux de chaleur à la paroi;		
$\theta_f$ ,	température de frottement;		
$\theta_{eff}$ ,	température effective locale;		
$p$ ,	pression statique;		
$Pr$ ,	nombre de Prandtl;		
$r$ ,	facteur thermique pariétal de frottement;		
$r_h$ ,	facteur enthalpique pariétal de frottement;		
$r_{co}$ ,	facteur enthalpique pariétal de convection local;		
$\alpha$ ,	coefficient de convection local;		
$R_{20}$ ,	nombre de Reynolds rapporté à $x$ ;		
$C_h$ ,	coefficient de transport d'enthalpie (ou nombre de Stanton).		
Indices inférieurs			
$e$ ,	écoulement extérieur à la couche limite;		
$p$ ,	conditions à la paroi;		

### INTRODUCTION

LORSQUE, dans un gaz, les vitesses et les différences de température ne sont plus très faibles, il faut tenir compte de la variation des propriétés physiques dans les équations de la couche limite laminaire.

Dans le cas particulier où la chaleur spécifique à pression constante  $c_p$  est constante, le nombre de Prandtl  $Pr$  est égal à 1, la viscosité  $\mu$  proportionnelle à la température absolue  $\theta$  et la paroi de l'obstacle thermiquement isolée, les équations de la couche limite peuvent se ramener aux équations de la couche limite incompressible. Cette possibilité avait été démontrée rigoureusement pour la plaque plane par Dorodnitsin [1] et Howarth [2]. Elle a été étendue au cas où la distribution de vitesse extérieure  $u_e(x)$  est quelconque par Stewartson [3] et Illingworth [4].

On sait que, si l'on abandonne les hypothèses précédentes, les équations de l'impulsion et de

l'énergie ne peuvent plus être rendues indépendantes. Nous allons montrer qu'on peut encore se ramener à une couche limite incompressible dans des conditions plus générales et notamment lorsque la température de paroi est quelconque. Pour cela, nous devons utiliser certaines hypothèses de calcul simplificatrices.

Nous supposons que le gaz est parfait, mais que  $c_p$  est, en général, fonction de  $\theta$ . D'autre part, la loi de variation de  $\mu$  en fonction de  $\theta$  ne sera pas imposée a priori. Le nombre de Prandtl  $Pr$  sera supposé constant, mais pas forcément égal à 1.

L'écoulement en dehors de la couche limite sera supposé isentropique.

## 1. ÉQUATIONS GÉNÉRALES

### 1.1. Équations de Prandtl

On sait que les équations de conservation de la masse, de la composante longitudinale de l'impulsion et de l'énergie dans la couche limite laminaire, dans un écoulement permanent et bidimensionnel, sont :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= \rho_e u_e \frac{dh_e}{dx} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

### 1.2. Équations de von Mises

Effectuons la transformation de von Mises [5] qui consiste à prendre, comme variables indépendantes, l'abscisse  $x$  et la fonction de courant  $\psi$  définie par :

$$u = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4)$$

et telle que  $\psi = 0$  lorsque  $y = 0$ .

Les trois équations de la couche limite (1), (2) et (3) se réduisent à deux :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} - \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \mu \rho u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h}{\partial x} - \rho_e u_e \frac{dh_e}{dx} - \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\mu \rho u}{Pr} \cdot \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) \\ = \mu \rho^2 u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Prenons comme variables dépendantes :

$$\begin{aligned} Z(x, \psi) &= u_e^2(x) - u^2(x, \psi), \\ T(x, \psi) &= \theta(x, \psi) - \theta_e(x), \\ \text{et} \quad H(x, \psi) &= h(x, \psi) - h_e(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Comme l'enthalpie ne dépend que de  $\theta$ ,  $T(x, \psi)$  sera fonction de  $H(x, \psi)$  et de  $h_e(x)$ . En effet :

$$T(x, \psi) = \theta(H + h_e) - \theta(h_e),$$

la fonction  $\theta(h)$  étant la fonction inverse de  $h(\theta) = \int_0^\theta c_p(\theta) d\theta$ .

Les équations (5) et (6) deviennent, en tenant compte de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \mu \rho \frac{\partial Z}{\partial \psi} \right) = - \frac{2u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx} T, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \mu \rho u \frac{\partial H}{\partial \psi} \right) + \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx} T = \\ - \frac{\mu \rho}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (9)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} Z(x, \psi) &= 0, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} Z(x, \psi) &= u_e^2(x), \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} Z(x, \psi) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

et :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} H(x, \psi) &= 0, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} H(x, \psi) &= h_n(x) - h_e(x), \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} H(x, \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

### 1.3. Enthalpie de référence

1.3.1. *Plaque plane.* On sait que l'on a pu intégrer numériquement les équations de la couche limite sur une plaque plane à température uniforme en tenant compte de la variation de  $\mu$  et de  $Pr$  en fonction de  $h$ . On peut retrouver respectivement les valeurs de  $\tau_p$  et de  $\Phi_p$  en utilisant les formules de la couche limite à propriétés physiques constantes dans lesquelles les valeurs de  $\mu$ , de  $\rho$  et de  $Pr$  sont celles que posséderait le gaz pour la même pression et pour une enthalpie  $h_r$  dite enthalpie de référence.

Eckert [6] a remarqué que l'on pouvait choisir, sans grande erreur, pour le calcul de  $\tau_p$  et de  $\Phi_p$ , dans le cas de l'air, la même enthalpie de référence, celle-ci étant une fonction linéaire empirique des enthalpies pariétale  $h_p$ , effective  $h_{\text{eff}}^\dagger$  et extérieure à la couche limite  $h_e$ :

$$h_r = h_e + 0,50(h_p - h_e) + 0,22(h_{\text{eff}} - h_e), \quad (12)$$

avec:

$$h_{\text{eff}} = h_e + r_c(h_t - h_e), \quad (13)$$

$r_c$  étant le facteur enthalpique pariétal de convection local, égal environ à  $[Pr(h_r)]^{1/2}$ .

Lorsque le nombre de Prandtl n'est pas constant, l'enthalpie effective n'est égale à l'enthalpie de frottement  $h_f$  que si l'on a  $\Phi_p = 0$ , ( $h_{\text{eff}} = h_p$ ).

Monaghan [7] a montré que l'on avait aussi une bonne approximation en choisissant comme enthalpie de référence la moyenne  $h_m$  de l'enthalpie par rapport à  $u$ ,  $x$  étant laissé constant:

$$\begin{aligned} h_r &= h_m = \int_0^1 h \, d(u/u_e) \\ &= \frac{1}{u_e} \cdot \int_0^{\infty} h(x, \psi) \frac{\partial u}{\partial \psi} \, d\psi. \end{aligned} \quad (14)$$

Si l'on remplace dans les équations  $\mu$ ,  $\rho$  et  $Pr$  par les valeurs  $\mu_m$ ,  $\rho_m = \rho_e \theta_e / \theta_m$  et  $Pr(h_m)$ , on voit qu'elles se ramènent aux équations de la couche limite à propriétés physiques constantes. En remplaçant dans (14)  $h(x, \psi)$  et  $u(x, \psi)$  par

<sup>†</sup> L'enthalpie effective est celle qui s'introduit dans la définition du coefficient de convection:

$$\Phi_p = \frac{\alpha}{c_p(\theta_p)} (h_p - h_{\text{eff}});$$

on trouvera plus loin, 1.5.2, une définition plus précise.

les expressions approchées obtenues ainsi, l'on obtiendra, pour  $Pr = 0,725$ , qui correspond à la valeur moyenne du nombre de Prandtl de l'air, l'expression donnée par Monaghan:

$$h_r = h_e + 0,54(h_p - h_e) + 0,16(h_{\text{eff}} - h_e). \quad (15)$$

1.3.2. *Équations simplifiées.* Dans le cas plus général d'une distribution quelconque de pression sur un obstacle à température non-uniforme, nous essaierons de généraliser la notion d'enthalpie de référence. Si nous examinons les équations (5) et (6), nous voyons que les propriétés physiques n'interviennent que par le groupement  $\mu\rho u$ ; il semble donc assez logique d'utiliser l'enthalpie moyenne (14) comme enthalpie de référence, de préférence à l'enthalpie de paroi ou à l'enthalpie de l'écoulement libre.

Nous remplacerons donc, dans les équations (8) et (9), le groupement  $\mu\rho$ , fonction de  $x$  et de  $\psi$ , par la valeur  $\mu_r\rho_r$ , fonction de  $x$  seulement, qu'il prendra pour la même pression  $p_e(x)$  et l'enthalpie de référence (14). Cette enthalpie sera déterminée a posteriori à l'aide des profils de vitesse  $u(x, \psi)$  et d'enthalpie  $h(x, \psi)$  obtenus grâce à l'intégration des équations simplifiées.

Les valeurs de la tension de frottement pariétale  $\tau_p$  et de la densité pariétale de flux de chaleur  $\Phi_p$  seront obtenues à l'aide des formules suivantes:

$$\tau_p = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left( \mu_r \rho_r u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right), \quad (16)$$

et

$$\Phi_p = - \frac{1}{Pr} \lim_{\psi \rightarrow 0} \left( \mu_r \rho_r \frac{\partial h}{\partial \psi} \right), \quad (17)$$

où  $\mu\rho$  sera également remplacé par  $\mu_r\rho_r$ .

### 1.4. Équation transformée de l'impulsion

Nous allons poser:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \int_0^x \frac{\mu_r \rho_r}{\mu_t \rho_t} \epsilon(x) \, dx, \\ y^* &= \epsilon(x) \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} \, dy, \\ u^* &= u/\epsilon(x), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$\epsilon(x)$  étant une fonction que l'on déterminera plus loin;  $\mu_t$  et  $\rho_t$  étant la viscosité et la masse

volumique qu'aurait le gaz à l'extérieur de la couche limite s'il était ramené isentropiquement au repos.

L'équation de l'impulsion s'écrira, en utilisant les grandeurs étoilées, et en posant :

$$\psi^* = \int_0^{y^*} \rho_t u^* dy^* = \psi, \quad (19)$$

et

$$Z^* = u_e^{*2} - u^{*2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial Z^*}{\partial x^*} - \mu_t \rho_t u^* \frac{\partial^2 Z^*}{\partial \psi^{*2}} = - \frac{2u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} \cdot \frac{T}{\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{dx^*} Z^*. \quad (21)$$

Le second membre de l'équation (21) s'annule lorsque  $\psi^*$  croît indéfiniment. Nous allons choisir  $\epsilon(x)$  de telle façon que ce second membre s'annule aussi à la paroi.

Il faut donc que :

$$\frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{dx^*} = - \frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{1}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*}. \quad (22)$$

$\epsilon(x)$  sera défini par la formule :

$$\epsilon(x) = C t^e \exp \left[ - \int_{x_0}^x \frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{u_e} \right]. \quad (23)$$

La constante et l'abscisse  $x_0$  sont arbitraires et indépendantes;  $x_0$  peut être pris égal à zéro, sauf si la vitesse  $u_e$  s'annule à l'origine.

Le second membre de (21) est égal alors à :

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{2u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} \cdot \frac{1}{\epsilon^2(x)} \\ & \left[ \theta - \theta_e - (\theta_p - \theta_e) \left( 1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) \right] \\ & - \frac{2u_e^2}{\theta_t} \cdot \frac{1}{M_e} \cdot \frac{dM_e}{dx} \cdot \frac{\mu_t \rho_t}{\mu_r \rho_r} \cdot \frac{1}{\epsilon^3(x)} \\ & \left[ \theta - \theta_e - (\theta_p - \theta_e) \left( 1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Ce terme est peu important, lorsque :

- (a) soit,  $u_e$  est faible;
- (b) soit,  $M_e$  est élevé;

(c) soit,  $dM_e/dx$  est faible;

(d) soit,  $\theta_p$  est voisin de  $\theta_f$ ,  $Pr$  étant voisin de 1.

Nous allons à présent négliger le second membre de l'équation (21), qui se ramène alors à l'équation de l'impulsion dans une couche limite fictive à propriétés physiques constantes  $\mu_t$  et  $\rho_t$  :

$$\frac{\partial Z^*}{\partial x^*} - \mu_t \rho_t u^* \frac{\partial^2 Z^*}{\partial \psi^{*2}} = 0. \quad (25)$$

On peut donc utiliser les méthodes générales de la couche limite à propriétés physiques constantes comme, par exemple, celles approchées de Pohlhausen et de Eckert [8] ou celle exacte de Görtler [9]. On pourra également choisir la méthode d'intégration par approximations successives de la Réf. 10.

Une fois calculée la tension de frottement pariétale fictive :

$$\tau_p^* = \mu_t (\partial u^* / \partial y^*)_p,$$

la véritable tension de frottement pariétale  $\tau_p$  sera obtenue grâce à (16), c'est-à-dire que :

$$\tau_p = \frac{\mu_r \rho_r}{\mu_t \rho_t} \epsilon^2(x) \tau_p^*. \quad (26)$$

### 1.5. Équation transformée de l'énergie

Si l'on fait les changements de variables (18), (19) et (20), l'équation de l'énergie deviendra :

$$\frac{\partial H}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left( u^* \frac{\partial H}{\partial \psi^*} \right) + \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} T = - \frac{\mu_t \rho_t}{2} \epsilon^2(x) \frac{\partial u^*}{\partial \psi^*} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial \psi^*}. \quad (27)$$

1.5.1. *Solution particulière.* Soit  $(H)_f$  la solution particulière de l'équation (27) correspondant à une densité de flux de chaleur nulle à la paroi et  $(T)_f$  la fonction définie par :

$$(T)_f = \theta[(H)_f + h_e] - \theta_e,$$

nous aurons :

$$\frac{\partial (H)_f}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left( u^* \frac{\partial (H)_f}{\partial \psi^*} \right) + \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} (T)_f = - \frac{\mu_t \rho_t}{2} \epsilon^2(x) \frac{\partial u^*}{\partial \psi^*} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial \psi^*}. \quad (28)$$

$(H)_f$  doit obéir aux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x^* \rightarrow 0} (H)_f &= 0, \\ \lim_{\psi^* \rightarrow 0} \psi^{*1/2} \cdot \frac{\partial(H)_f}{\partial\psi^*} &= 0, \\ \lim_{\psi^* \rightarrow \infty} (H)_f &= 0. \end{aligned} \right\} (29)$$

Posons :

$$(H)_f^* = (H)_f / \epsilon^2(x). \quad (30)$$

L'équation (24) devient, en utilisant la relation (22) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(H)_f^*}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left( u^* \frac{\partial(H)_f^*}{\partial \psi^*} \right) \\ - \frac{2}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} \left[ \frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e} (H)_f^* - \frac{u_e^2}{2\theta_e} \cdot \frac{(T)_f}{\epsilon^2(x)} \right] = \\ - \frac{\mu_t \rho_t}{2} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \psi^*} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial \psi^*} \end{aligned} \right\} (31)$$

Le troisième terme du premier membre est, à la paroi, égal à :

$$\left. \begin{aligned} - \frac{2}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} \cdot \frac{1}{\theta_e \epsilon^2(x)} [(\theta_p - \theta_f)(h_f - h_e) \\ + (\theta_f - \theta_e)(h_f - h_t)] = \\ - \frac{2}{\theta_t} \cdot \frac{1}{M_e} \cdot \frac{dM_e}{dx} \cdot \frac{\mu_t \rho_t}{\mu_r \rho_r} \cdot \frac{1}{\epsilon^3(x)} \\ \times [(\theta_p - \theta_f)(h_f - h_e) \\ + (\theta_f - \theta_e)(h_f - h_t)], \end{aligned} \right\} (32)$$

où  $h_f$  et  $\theta_f$  sont respectivement l'enthalpie et la température de frottement.

Cette expression est faible dans les cas (a), (b), (c), (d) envisagés au paragraphe 1.4.

Si nous négligeons le troisième terme du premier membre, nous aurons donc :

$$\frac{\partial(H)_f^*}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left( u^* \frac{\partial(H)_f^*}{\partial \psi^*} \right) = - \frac{\mu_t \rho_t}{2} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \psi^*} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial \psi^*}. \quad (33)$$

Cette équation est identique à l'équation de l'énergie dans une couche limite fictive à viscosité et masse volumique constantes, le nombre de Prandtl étant resté le même.

Les conditions aux limites (29) combinées avec (30) montrent que, dans la couche limite fictive, la paroi doit être également thermiquement isolée. Nous pourrions donc calculer le facteur enthalpique pariétal de frottement :

$$r_h = \frac{h_f - h_e}{h_t - h_e} = \lim_{\psi^* \rightarrow 0} \left[ \frac{2(H)_f^*}{u_e^{*2}} \right]. \quad (34)$$

Si l'on utilise la méthode de la Réf. 11, on voit qu'en première approximation  $r_h$  est non seulement indépendant du gradient de pression, mais encore du nombre de Mach de l'écoulement amont :

$$r_h = r_1(Pr) = Pr_2^{1/3} F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{Pr-1}{Pr} \right), \quad (35)$$

cette formule étant valable lorsque  $\frac{1}{2} < Pr < \infty$ .

1.5.2. Équation sans second membre. Posons :

$$\hat{H} = H - (H)_f \quad (36)$$

et :

$$\hat{T} = T - (T)_f. \quad (37)$$

$\hat{H}$  sera solution de l'équation sans second membre :

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left( u^* \frac{\partial \hat{H}}{\partial \psi^*} \right) + \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} \hat{T} = 0, \quad (38)$$

et satisfera aux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x^* \rightarrow 0} \hat{H} &= 0, \\ \lim_{\psi^* \rightarrow 0} \hat{H} &= h_p(x^*) - h_f(x^*), \\ \lim_{\psi^* \rightarrow \infty} \hat{H} &= 0. \end{aligned} \right\} (39)$$

Le troisième terme du premier membre de (38) est, à la paroi, égal à :

$$\begin{aligned} \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} (\theta_p - \theta_f) \\ = \frac{u_e^2}{\theta_t} \cdot \frac{1}{M_e} \cdot \frac{dM_e}{dx} \cdot \frac{\mu_t \rho_t}{\mu_r \rho_r} \cdot \frac{\theta_p - \theta_f}{\epsilon(x)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Cette expression est faible dans les quatre cas envisagés au paragraphe 1.4.

Si on néglige le troisième terme du premier membre, on obtiendra :

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left( u^* \frac{\partial \hat{H}}{\partial \psi^*} \right) = 0. \quad (41)$$

Cette équation est identique à l'équation de l'énergie sans second membre, dans une couche limite fictive à viscosité et masse volumique constantes, le nombre de Prandtl étant resté le même.

Nous pourrions donc employer les méthodes de la couche limite à propriétés physiques constantes en  $y$  remplaçant  $c_p \theta$  par  $h$ . Si la température de la paroi est uniforme, on pourra, par exemple, utiliser les solutions d'Eckert [12] correspondant au cas où  $u_e^* = cx^{*m}$ , comme l'ont fait Brun et Vasseur [13] et Merk [14]. Dans le cas général d'une température de paroi non-uniforme, on pourra appliquer la méthode d'intégration par approximations successives de la Réf. 10, dont la première approximation est décrite dans la Réf. 11.

Une fois calculée la densité pariétale fictive de flux de chaleur :

$$\Phi_p^* = - \frac{\mu_t \rho_t}{Pr} \lim_{\psi^* \rightarrow 0} \left( u^* \frac{\partial \hat{H}}{\partial \psi^*} \right), \quad (42)$$

on obtiendra la véritable densité pariétale de flux de chaleur  $\Phi_p$  grâce à la formule (17), soit :

$$\Phi_p = \frac{\mu_r \rho_r}{\mu_t \rho_t} \epsilon(x) \Phi_p^*. \quad (43)$$

On peut définir les enthalpies effectives locales dans la couche limite fictive de la façon suivante: supposons que l'enthalpie pariétale  $h_p(x^*)$  soit de la forme  $h_t + aP(x^*)$ , l'enthalpie effective locale  $h_{\text{eff}}(x^*)$ , en un point d'abscisse  $x^*$ , sera la valeur de l'enthalpie pariétale pour laquelle  $\Phi_p^*$  s'annule lorsque l'on fait varier le paramètre  $a$ , les expressions  $\mu_r \rho_r$  et  $\epsilon(x)$  restant inchangées.

Le coefficient de convection local dans la couche limite réelle sera défini par la formule :

$$\alpha = \frac{\Phi_p c_p (\theta_p)}{h_p - h_{\text{eff}}}. \quad (44)$$

Comme  $h_r$  et  $\epsilon(x)$  dépendent en réalité de  $h_p$ ,  $\alpha$  et  $h_{\text{eff}}$  en dépendront également et leur considération offre dans ce cas moins d'intérêt

que dans celui où les propriétés physiques peuvent être supposées constantes. On présentera en général les résultats des calculs sous la forme de la fonction  $\Phi_p(x)$ , pour chaque distribution de température pariétale  $\theta_p(x)$  envisagée.

## 2. ÉTUDE DE LA NOUVELLE TRANSFORMATION

La nouvelle transformation prend une forme plus simple dans deux cas particuliers qui se présentent assez souvent en pratique.

### 2.1. Paroi thermiquement isolée

Lorsque  $c_p$  est constant, le facteur enthalpique pariétal  $r_h$  se ramène au facteur thermique pariétal :

$$r = \frac{\theta_f - \theta_e}{\theta_t - \theta_e}.$$

Si l'on choisit pour  $r$  l'expression  $r_1(Pr)$  donnée par la formule (35),  $\epsilon(x)$  prend une forme très simple.

En effet :

$$\int_{x_0}^x \frac{\theta_{f1} - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{u_e} = - \frac{r_1}{2} [\text{Log } \theta_e(x) - \text{Log } \theta_e(x_0)]. \quad (45)$$

En choisissant convenablement  $x_0$  et la constante de la formule (23), pour que la couche limite réelle se raccorde, au voisinage du point d'arrêt (où  $h_f = h_t$ ), à la couche limite fictive transformée, on obtient :

$$\epsilon(x) = (\theta_e/\theta_t)^{r_1/2}. \quad (46)$$

Lorsque l'enthalpie de référence  $h_r$  est prise égale à l'enthalpie de frottement  $h_{f1}$ , les formules de transformation (18) où l'on a remplacé  $\epsilon(x)$  par (46) sont identiques aux formules obtenues auparavant par Rott [15], Tani [16] et l'auteur [17].

Ces formules avaient été établies en utilisant l'équation globale de la quantité de mouvement et diverses lois hypothétiques de température. On voit qu'ici cette restriction a été levée puisque la loi de température est obtenue à l'aide de la solution de l'équation de l'énergie transformée.

Si l'on suppose, en outre, que  $Pr = 1$ , on se ramène à la transformation d'Illingworth-Stewartson [3, 4], qui ne serait valable rigoureusement que si la viscosité était proportionnelle à la température absolue.

## 2.2. Paroi à température uniforme

La fonction  $\epsilon(x)$  prend également, dans ce cas, une forme simple, lorsque  $c_p$  est constant.

En effet :

$$\int_{x_0}^x \frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{u_e} = (k - 1) \text{Log} [u_e(x)/u_e(x_0)] - \frac{k}{2} \text{Log} [\theta_e(x)/\theta_e(x_0)], \quad (47)$$

où  $k$  est le rapport de la température de paroi  $\theta_p$  à la température totale  $\theta_t$ .

La forme générale de  $\epsilon(x)$  sera donc :

$$\epsilon(x) = \left(\frac{u_e}{u_r}\right)^{1-k} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t}\right)^{k/2}, \quad (48)$$

où  $u_r$  est une vitesse de référence qui joue le rôle des constantes de la formule (23).

## 3. PROFILS EN ANAMORPHOSE

### 3.1. Équations de Cohen et Reshotko

Pour savoir si le fait d'avoir négligé certains termes dans les équations de l'impulsion et de l'énergie conduit à des résultats différents de ceux obtenus en intégrant les équations complètes, nous allons examiner un cas où cette intégration a été effectuée.

Nous utiliserons les formules (18) où  $\epsilon(x)$  sera pris égal à  $(\theta_e/\theta_t)^{1/2}$ . Nous désignerons les grandeurs transformées par des lettres surmontées d'un tilde :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= \int_0^x \frac{\mu_r \rho_r}{\mu_t \rho_t} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t}\right)^{1/2} dx, \\ \tilde{y} &= \left(\frac{\theta_e}{\theta_t}\right)^{1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} dy, \\ \tilde{u} &= u \left(\frac{\theta_t}{\theta_e}\right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

On peut montrer que, dans le cas où la température de la paroi  $\theta_p$  est uniforme,  $c_p$  est constant et  $Pr$  est égal à 1, les équations de l'impulsion et de l'énergie se ramènent à des équations différentielles lorsque  $\tilde{u}_e = c\tilde{x}^m$ . Le nombre de Mach  $M_e$  à l'extérieur de la couche limite est alors une fonction paramétrique de  $x$  de la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} M_e &= c\tilde{x}^m/a_t, \\ x &= \int_0^{\tilde{x}} \frac{\mu_t \theta_r}{\mu_r \theta_t} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{c^2}{a_t^2} \tilde{x}^{2m}\right)^{\frac{3\gamma - 1}{2(\gamma - 1)}} d\tilde{x}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$\gamma$  étant le rapport des chaleurs spécifiques et  $a = \sqrt{\{(\gamma - 1)c_p\theta\}}$  étant la célérité du son dans le gaz. La température de référence  $\theta_r$  est une fonction de  $\tilde{x}$  qui sera déterminée après l'intégration des équations.

On doit poser :

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e} = f'(\beta, k; \tilde{\eta}) \quad (51)$$

ou

$$\psi = \tilde{\psi} = \rho_t \sqrt{\left(\frac{2\nu_t \tilde{u}_e \tilde{x}}{m+1}\right)} f(\beta, k; \tilde{\eta}), \quad (52)$$

et

$$\frac{\theta_i - \theta_t}{\theta_p - \theta_t} = Y_0(\beta, k; \tilde{\eta}) \left(\theta_i = \theta + \frac{u^2}{2}\right), \quad (53)$$

avec

$$\tilde{\eta} = \tilde{y} \sqrt{\left(\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\tilde{u}_e}{\nu_t \tilde{x}}\right)}. \quad (54)$$

Les paramètres sont  $\beta = 2m/(m+1)$  et  $k$ , rapport de la température de paroi  $\theta_p$  à la température totale  $\theta_t$ .

Les équations de l'impulsion et de l'énergie deviennent :

$$\left. \begin{aligned} f''' + ff'' + \beta[1 - f'^2 + Y_0(k-1)] &= 0, \\ Y_0'' + fY_0' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Les fonctions  $f(\beta, k; \tilde{\eta})$  et  $Y_0(\beta, k; \tilde{\eta})$  devront satisfaire aux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} f(\beta, k; 0) = f'(\beta, k; 0) &= 0; \\ Y_0(\beta, k; 0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

et

$$\lim_{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} f'(\beta, k; \tilde{\eta}) = 1; \lim_{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} Y_0(\beta, k; \tilde{\eta}) = 0. \quad (57)$$

Le système (55) a été intégré numériquement par Cohen et Reshotko [18] qui ont obtenu ainsi les profils de vitesse  $u(x, y)$  et de températures d'arrêt  $\theta_i(x, y)$  sous les formes anamorphosées :

$$u = u_e f'(\beta, k; \tilde{\eta})$$

et

$$\theta_i = \theta_t + (\theta_p - \theta_t) Y_0(\beta, k; \bar{\eta}).$$

Pour repasser aux profils réels, on utilisera la formule paramétrique:

$$y = \left( \frac{\theta_t}{\theta_e} \right)^{\frac{8\gamma-1}{4(\gamma-1)}} \sqrt{\left( \frac{2\nu_t \bar{x}}{(m+1)u_e} \right)} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \int_0^{\bar{\eta}} [1 + (k-1)Y_0(\beta, k; \bar{\eta}) \\ - \frac{u_e^2}{2\theta_t} f'^2(\beta, k; \bar{\eta})] d\bar{\eta}. \end{array} \right\} (58)$$

### 3.2. Application de la nouvelle transformation

Nous allons voir à présent si la nouvelle transformation définie par les formules (18) avec l'expression (48) de  $\epsilon(x)$  peut s'appliquer au cas où la distribution du nombre de Mach  $M_e(x)$  est exprimée à l'aide des formules paramétriques (50).

A condition que la température de référence soit la même, nous obtiendrons, dans la couche limite fictive:

$$u_e^* = c^* x^{*m^*}, \quad (59)$$

avec

$$c^* = c \left( \frac{c}{u_r} \right)^{\frac{(m+1)(k-1)}{m(1-k)+1}} \quad (60)$$

et

$$m^* = \frac{km}{m(1-k)+1}. \quad (61)$$

On se ramènera donc aux équations de la couche limite à propriétés physiques constantes, dans le cas dit des dièdres, avec:

$$\beta^* = \frac{2m^*}{m^*+1} = \beta k \quad (62)$$

Posons:

$$\frac{u}{u_e} = \frac{u^*}{u_e^*} = f'(\beta k, 1; \eta^*) \quad (63)$$

ou

$$\psi = \psi^* = \rho_t \sqrt{\left( \frac{2\nu_t u_e^* x^*}{m^*+1} \right)} f(\beta k, 1; \eta^*), \quad (64)$$

et

$$\frac{\theta_i - \theta_t}{\theta_p - \theta_t} = Y_0(\beta k, 1; \eta^*), \quad (65)$$

avec

$$\eta^* = y^* \sqrt{\left( \frac{m^*+1}{2} \cdot \frac{u_e^*}{\nu_t x^*} \right)}. \quad (66)$$

Les équations de l'impulsion et de l'énergie dans la couche limite fictive sont:

$$\left. \begin{array}{l} f''' + ff'' + \beta k(1-f'^2) = 0, \\ Y_0'' + fY_0' = 0 \end{array} \right\} (67)$$

Les fonctions  $f(\beta k, 1; \eta^*)$  et  $Y_0(\beta k, 1; \eta^*)$  obéissent aux conditions aux limites suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} f(\beta k, 1; 0) = f'(\beta k, 1; 0) = 0; \\ Y_0(\beta k, 1; 0) = 1 \end{array} \right\} (68)$$

et

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\eta^* \rightarrow \infty} f'(\beta k, 1; \eta^*) = 1; \\ \lim_{\eta^* \rightarrow \infty} Y_0(\beta k, 1; \eta^*) = 0. \end{array} \right\} (69)$$

3.2.1. Profils de vitesse et de température d'arrêt. Pour pouvoir comparer les profils de vitesse et de température d'arrêt, nous allons déterminer les rapports  $u/u_e$  et  $(\theta_i - \theta_t)/(\theta_p - \theta_t)$  en fonction de  $\bar{\eta}$ , en partant des profils de la couche limite fictive exprimés en fonction de  $\eta^*$ .

En effet, comme  $\psi = \bar{\psi} = \psi^*$ , on voit facilement que l'on doit avoir:

$$f(\beta, k; \bar{\eta}) = f(\beta k, 1; \eta^*). \quad (70)$$

Nous avons porté sur les Figs. 1-5,  $u/u_e$  en fonction de  $\bar{\eta}$ , pour les cas suivants:

$$\left. \begin{array}{l} \beta = 0,5 \quad k = 0 \quad 0,2 \quad 0,6 \text{ et } 2, \\ \beta = 1 \quad k = 2, \end{array} \right\}$$

en utilisant les profils de vitesse de la couche limite à propriétés physiques constantes calculés par Smith [19].

Nous avons porté sur les Figs. 6 et 7,  $(\theta_i - \theta_t)/(\theta_p - \theta_t)$  en fonction de  $\bar{\eta}$ , pour les cas suivants:

$$\beta = 0,5 \quad k = 0 \text{ et } 2,$$

en utilisant les calculs de Görtler [20].

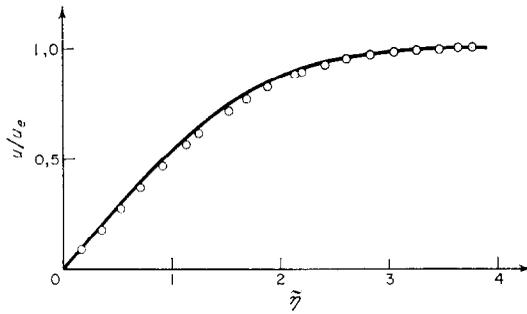


FIG. 1.  $\beta = 0,5; k = 0; Pr = 1$   
 — Cohen et Reshotko [18]  
 ○ Méthode actuelle.

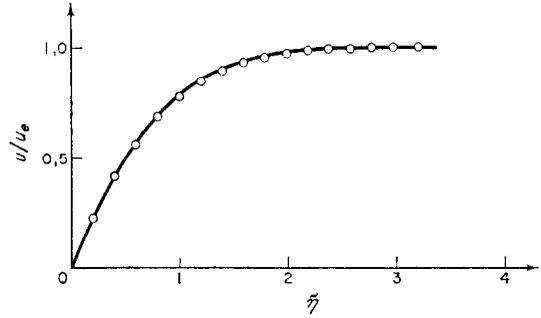


FIG. 4.  $\beta = 0,5; k = 2; Pr = 1$   
 — Cohen et Reshotko [18]  
 ○ Méthode actuelle.

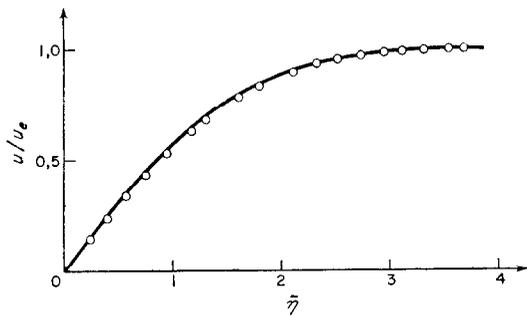


FIG. 2.  $\beta = 0,5; k = 0,2; Pr = 1$   
 — Cohen et Reshotko [18]  
 ○ Méthode actuelle.

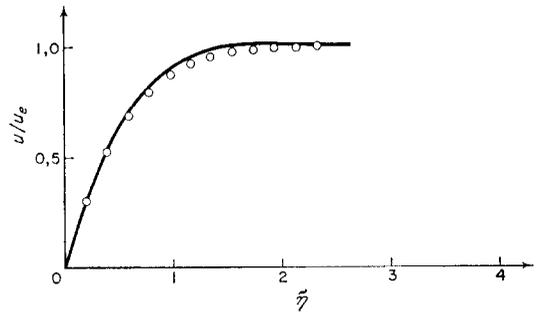


FIG. 5.  $\beta = 1; k = 2; Pr = 1$   
 — Cohen et Reshotko [18]  
 ○ Méthode actuelle.

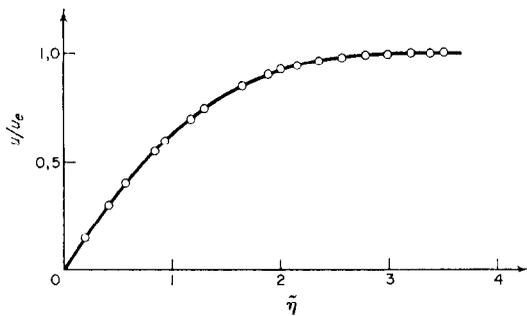


FIG. 3.  $\beta = 0,5; k = 0,6; Pr = 1$   
 — Cohen et Reshotko [18]  
 ○ Méthode actuelle.

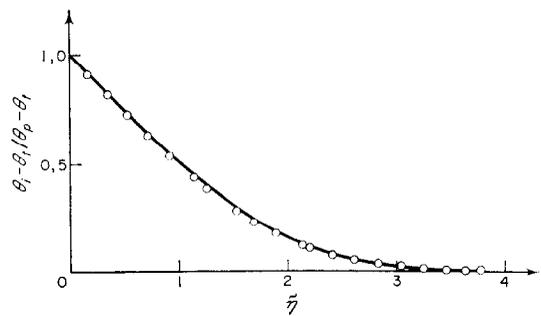


FIG. 6.  $\beta = 0,5; k = 0; Pr = 1$   
 — Cohen et Reshotko [18]  
 ○ Méthode actuelle.

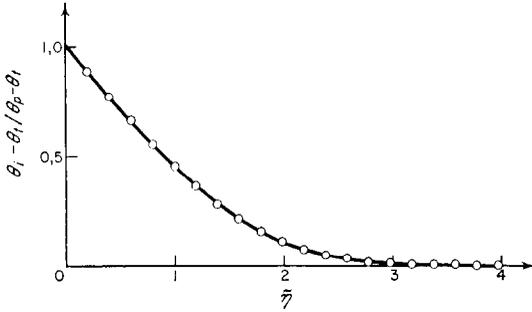


FIG. 7.  $\beta = 0,5$ ;  $k = 2$ ;  $Pr = 1$   
 — Cohen et Reshotko [18]  
 ○ Méthode actuelle.

Les profils de vitesse et de température d'arrêt calculés par les deux méthodes sont presque indiscernables pour  $\beta = 0,5$ ,  $k = 0,6$  et  $2$ . Pour  $\beta = 0,5$ ,  $k = 0$  et  $0,2$ , les profils obtenus avec la nouvelle transformation sont légèrement inférieurs aux profils de Cohen et Reshotko. Dans le cas  $\beta = 1$  et  $k = 2$ , on n'obtient évidemment pas un profil avec survitesse comme celui de Cohen et Reshotko, mais les profils sont encore assez voisins.

Remarquons que la comparaison a été faite sur les profils anamorphosés à l'aide de la variable  $\tilde{\eta}$ . Pour repasser aux profils réels, il faut utiliser la formule (58) dans le cas de Cohen et Reshotko, et la formule suivante:

$$y = \left(\frac{\theta_i}{\theta_e}\right)^{\frac{5\gamma-1}{4(\gamma-1)}} \sqrt{\left(\frac{2\nu_t \tilde{x}}{(m+1)u_e}\right)} \int_0^{\tilde{\eta}} [1 + (k-1)Y_0(\beta k, 1; \eta^*) - \frac{u_e^2}{2\theta_i} f'^2(\beta k, 1; \eta^*)] d\tilde{\eta}, \quad (71)$$

pour les profils obtenus avec la nouvelle transformation.

3.2.2. Coefficients de frottement et de transport d'enthalpie. Soient la tension de frottement pariétale:

$$\tilde{\tau}_p = \mu_t \rho_t \lim_{\tilde{\psi} \rightarrow 0} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\psi}} \right), \quad (72)$$

et le nombre de Reynolds:

$$\tilde{R}_x = \frac{\tilde{u}_e \tilde{x}}{\nu_t} = \frac{u_e}{\nu_t} \left(\frac{\theta_i}{\theta_e}\right)^{1/2} \int_0^x \frac{\mu_r \rho_r}{\mu_t \rho_t} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t}\right)^{1/2} dx. \quad (73)$$

Le coefficient de frottement sera donné par:

$$\tilde{C}_f = \frac{2\tilde{\tau}_p}{\rho_t \tilde{u}_e^2} = 2^{1/2} (m+1)^{1/2} f''(\beta, k; 0) \tilde{R}_x^{-1/2}. \quad (74)$$

D'après (26):

$$\tau_p = \frac{\mu_r \theta_t}{\mu_t \theta_r} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}} \tilde{\tau}_p. \quad (75)$$

Le coefficient de frottement local obtenu à l'aide de l'intégration des équations non simplifiées (55), sera donné, en fonction de  $\tilde{R}_x$ , par:

$$C_f = \frac{2\tau_p}{\rho_e \tilde{u}_e^2} = \frac{\mu_r \theta_t}{\mu_t \theta_r} \tilde{C}_f = 2^{1/2} \frac{\mu_r \theta_t}{\mu_t \theta_r} (m+1)^{1/2} f''(\beta, k; 0) \tilde{R}_x^{-1/2}. \quad (76)$$

D'autre part, si l'on pose:

$$\tau_p^* = \mu_t \rho_t \lim_{\psi^* \rightarrow 0} \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial \psi^*} \right), \quad (77)$$

et:

$$R_x^* = \frac{u_e^* x^*}{\nu_t}, \quad (78)$$

on aura:

$$C_f^* = \frac{2\tau_p^*}{\rho_t \tilde{u}_e^{*2}} = 2^{1/2} (m^*+1)^{1/2} f''(\beta k, 1; 0) R_x^{*-1/2}. \quad (79)$$

D'après (26):

$$\tau_p = \frac{\mu_r \rho_r}{\mu_t \rho_t} \cdot \left(\frac{u_e}{u_r}\right)^{2(1-k)} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t}\right)^k \tau_p^*. \quad (80)$$

Le coefficient de frottement local obtenu à l'aide de la nouvelle transformation et de l'intégration des équations simplifiées (67) sera donné par la formule approchée:

$$C_f = 2^{1/2} \frac{\mu_r \theta_t}{\mu_t \theta_r} (m+1)^{1/2} f''(\beta k, 1; 0) \tilde{R}_x^{-1/2}. \quad (81)$$

La densité de flux de chaleur pariétale dans la couche limite fictive est obtenue à l'aide de l'intégration des équations non simplifiées (55):

$$\tilde{\Phi}_p = -\mu_t c_p (\theta_p - \theta_i) \sqrt{\left(\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\tilde{u}_e}{\nu_t \tilde{x}}\right)} Y'_0(\beta, k; 0). \quad (82)$$

Puisque  $\theta_{\text{eff}} = \theta_t$  lorsque  $Pr = 1$ , le coefficient de transport d'enthalpie local sera alors égal à :

$$\tilde{C}_h = \frac{\tilde{\Phi}_p}{\rho_t \tilde{u}_e c_p (\theta_p - \theta_t)} = -\sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)} Y'_0(\beta, k; 0) \tilde{R}_x^{-1/2}. \quad (83)$$

D'après (43) :

$$\Phi_p = \frac{\mu_r \rho_r}{\mu_t \rho_t} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t}\right)^{1/2} \tilde{\Phi}_p \quad (84)$$

et

$$C_h = \frac{\Phi_p}{\rho_e u_e c_p (\theta_p - \theta_t)} = \frac{\mu_r \theta_e}{\mu_t \theta_r} \tilde{C}_h = -\frac{\mu_r \theta_e}{\mu_t \theta_r} \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)} Y'_0(\beta, k; 0) \tilde{R}_x^{-1/2} \quad (85)$$

D'autre part, on a :

$$\Phi_p^* = -\mu_t c_p (\theta_p - \theta_t) \sqrt{\left(\frac{m^*+1}{2}\right) \frac{u_e^*}{v_t x^*}} Y'_0(\beta k, 1; 0). \quad (86)$$

Le coefficient de transport d'enthalpie local obtenu à l'aide la nouvelle transformation et de l'intégration des équations simplifiées sera donné par la formule approchée :

$$C_h = -\frac{\mu_r \theta_e}{\mu_t \theta_r} \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)} Y'_0(\beta k, 1; 0) \tilde{R}_x^{-1/2} \quad (87)$$

Nous avons porté sur les Figs. 8 et 9 les courbes représentant les variations des expressions :

$$\tilde{C}_f \tilde{R}_x^{1/2} / (m+1)^{1/2} \text{ et } \tilde{C}_h \tilde{R}_x^{1/2} / (m+1)^{1/2},$$

en fonction de  $\beta$ , pour les deux groupes de formules (76), (81), (85) et (87),  $k$  prenant les valeurs 0; 0,2; 0,6; 1 et 2.

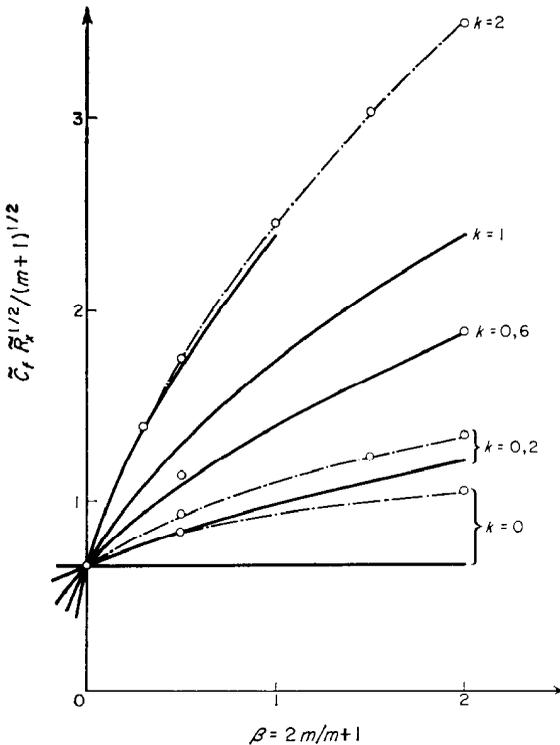


FIG. 8.  $Pr = 1$   
 ○ - - - Cohen et Reshotko [18]  
 ——— Méthode actuelle.

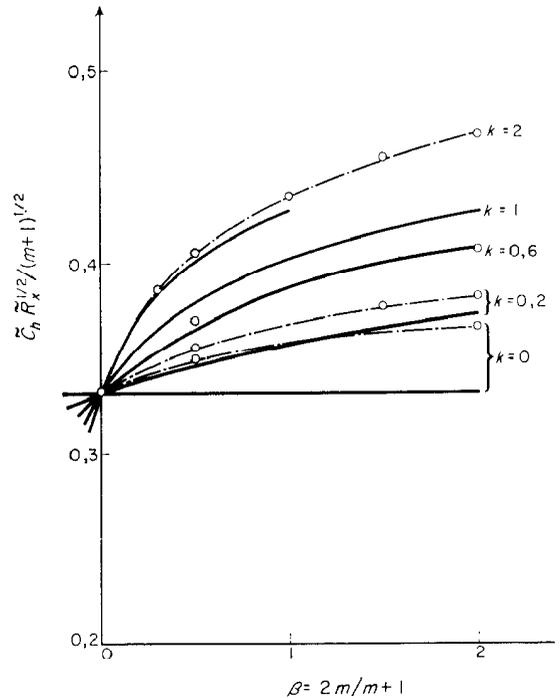


FIG. 9.  $Pr = 1$   
 ○ - - - Cohen et Reshotko [18]  
 ——— Méthode actuelle.

Lorsque  $k = 1$ , on a évidemment les mêmes courbes. Lorsque  $k > 1$ , les formules approchées (81) et (87) ne sont valables que lorsque  $\beta < 2/k$ .

Pour  $k = 0,6$  et  $2$ , les points calculés par Cohen et Reshotko sont extrêmement voisins des courbes approchées.

Lorsque  $k = 0$  et  $0,2$ , les courbes approchées sont en-dessous des courbes de Cohen et Reshotko. Cela concorde avec le fait que les hypothèses introduites aux paragraphes 1.4 et 1.5.1 sont d'autant plus justifiées que  $\theta_p - \theta_t$  est faible.

### 3.3. Flux de chaleur aux points d'arrêt dans un écoulement bidimensionnel ou de révolution

Au voisinage d'un point d'arrêt, on a :

$$u_e(x) = x(du_e/dx)_t.$$

On peut alors montrer, comme au paragraphe 3.1, en utilisant la transformation de Mangler [22] pour le cas de révolution, que les profils de vitesse et de température d'arrêt peuvent se mettre, si  $c_p$  est constant, sous les formes anamorphosées :

$$\frac{u}{u_e} = f'(\beta, k; Pr; \bar{\eta}) \quad (88)$$

et

$$\frac{\theta_i - \theta_t}{\theta_p(0) - \theta_t} = Y_0(\beta, k; Pr; \bar{\eta}), \quad (89)$$

où

$$k = \theta_p(0)/\theta_t$$

et

$$\bar{\eta} = \bar{y} \sqrt{\left\{ \frac{\tilde{u}_e}{v_t(2 - \beta)\bar{x}} \right\}} \\ = \sqrt{\left\{ \frac{(1 + j)(du_e/dx)_t}{\mu_r \rho_r} \right\}} \int_0^y \rho dy. \quad (90)$$

$\beta$  et  $j$  prennent respectivement les valeurs 1 et 0 dans le cas bidimensionnel, et les valeurs  $\frac{1}{2}$  et 1 dans le cas de révolution.

Les fonctions  $f(\beta, k; Pr; \bar{\eta})$  et  $Y_0(\beta, k; Pr; \bar{\eta})$  sont solutions des équations :

$$\left. \begin{aligned} f''' + ff'' + \beta [1 - f'^2 + Y_0(k - 1)] &= 0, \\ Y_0'' + Pr f Y_0' &= 0, \end{aligned} \right\} (91)$$

avec les conditions aux limites (56) et (57).

La densité de flux de chaleur au point d'arrêt sera donnée par :

$$\Phi_p = \frac{c_p[\theta_p(0) - \theta_t]}{Pr} \sqrt{\{(1 + j)\mu_r \rho_r (du_e/dx)_t\}} \\ Y_0'(\beta, k; Pr; 0). \quad (92)$$

La température effective est égale à la température totale et la température de référence sera donnée par la formule :

$$\theta_r = \theta_t + a(\beta, k; Pr) [\theta_p(0) - \theta_t], \quad (93)$$

avec

$$a(\beta, k; Pr) \\ = \int_0^\infty Y_0(\beta, k; Pr; \bar{\eta}) f'(\beta, k; Pr; \bar{\eta}) d\bar{\eta}. \quad (94)$$

Si l'on utilise la nouvelle transformation, on pourra poser :

$$\frac{u}{u_e} = f'(bk, 1; Pr; \eta^*), \quad (95)$$

et

$$\frac{\theta_i - \theta_t}{\theta_p(0) - \theta_t} = Y_0(bk, 1; Pr; \eta^*), \quad (96)$$

avec

$$\eta^* = y^* \sqrt{\left\{ \frac{u_e^*}{v_t(2 - \beta k)x^*} \right\}} \\ = \sqrt{\left\{ \frac{(1 + j)(du_e/dx)_t}{\mu_r \rho_r} \right\}} \int_0^y \rho dy. \quad (97)$$

Les fonctions  $f(bk, 1; Pr; \eta^*)$  et  $Y_0(bk, 1; Pr; \eta^*)$  sont solutions des équations :

$$\left. \begin{aligned} f''' + ff'' + \beta k(1 - f'^2) &= 0, \\ Y_0'' + Pr f Y_0' &= 0, \end{aligned} \right\} (98)$$

avec les conditions aux limites (68) et (69).

La densité de flux de chaleur au point d'arrêt sera donnée par :

$$\Phi_p = \frac{c_p[\theta_p(0) - \theta_t]}{Pr} \sqrt{\{(1 + j)\mu_r \rho_r (du_e/dx)_t\}} \\ Y_0'(bk, 1; Pr; 0). \quad (99)$$

La température de référence sera :

$$\theta_r = \theta_t + a(bk, 1; Pr) [\theta_p(0) - \theta_t], \quad (100)$$

avec

$$a(bk, 1; Pr) = \int_0^\infty Y_0(bk, 1; Pr; \eta^*) f'(bk, 1; Pr; \eta^*) d\eta^*. \quad (101)$$

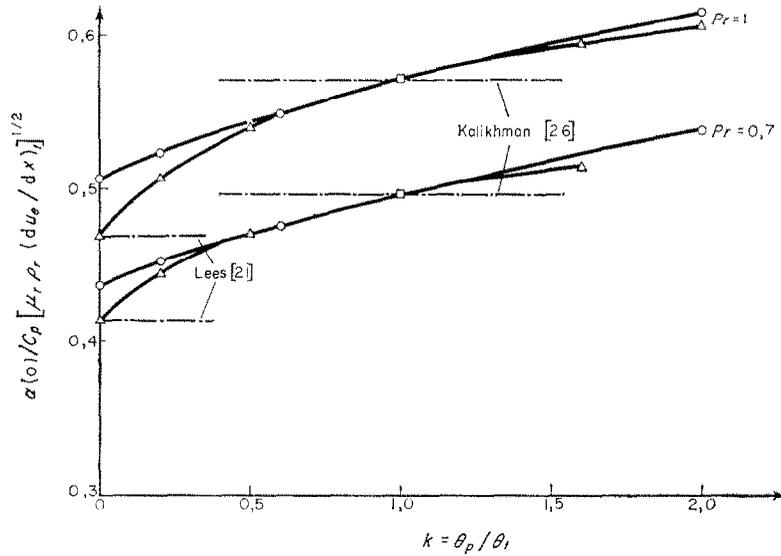


FIG. 10. Point d'arrêt dans un écoulement bidimensionnel

□ Squire [24]      ○ Reshotko et Cohen [23]      △ Méthode actuelle.

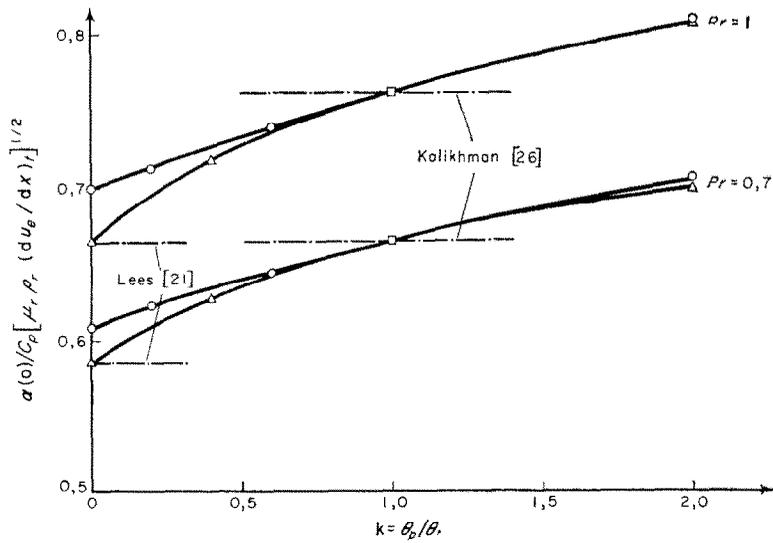


FIG. 11. Point d'arrêt dans un écoulement de révolution

□ Brun et Vasseur [13]      ○ Reshotko et Cohen [23]      △ Méthode actuelle.

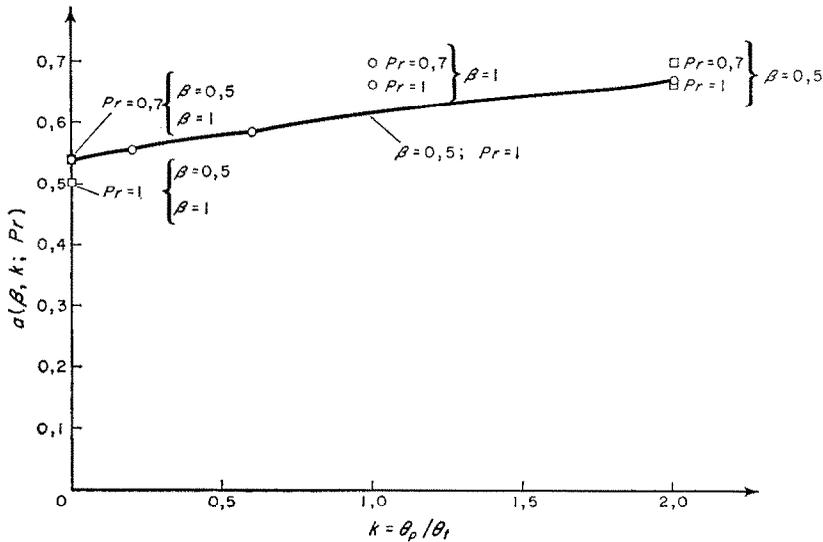


FIG. 12. Point d'arrêt dans un écoulement bidimensionnel ou de révolution

○ Valeurs calculées avec les profils exacts    □ Valeurs calculées avec les profils approchés.

On a porté sur les Figs. 10 et 11 les valeurs de  $a/c_p [\mu_r \rho_r (du_e/dx)_t]^{1/2}$  en fonction de  $k$ , pour  $Pr = 0,7$  et  $1$ , en utilisant les formules (92) et (99), où les  $Y'_0$  ont été calculés, d'une part, par Reshotko et Cohen [23] et, d'autre part, par Eckert [12].

Lorsque  $k = 1$ , on retombe sur les valeurs de Squire [24] pour le cas bidimensionnel, et sur les valeurs de Brun et Vasseur [25] pour le cas de révolution. On voit que les valeurs obtenues à l'aide de la nouvelle transformation sont voisines de celles obtenues en intégrant les équations complètes, surtout lorsque  $0,5 < k < 2$ .

On peut passer ainsi d'une façon continue de la théorie de Kalikhman [26] où l'on néglige le terme en  $(u_e/\theta_e) \cdot du_e/dx$  dans (5) et (6), à la théorie de Lees [21] qui correspond au cas où l'on prend  $\epsilon(x)$  constamment égal à  $u_e/u_r$ , quel que soit  $k$ , et où l'on néglige alors le second membre de (21) et le troisième terme du premier membre de (38).

On remarquera qu'on peut traiter, avec la nouvelle transformation, le cas des points d'arrêt en écoulement bidimensionnel ou de révolution, lorsque  $c_p$  est variable. On a alors:

$$a = \frac{\Phi_p c_p [\theta_p(0)]}{h_p(0) - h_i}$$

#### 4. OBSTACLE QUELCONQUE A TEMPÉRATURE UNIFORME FAIBLE DEVANT LA TEMPÉRATURE TOTALE

Lorsque le rapport  $k$  tend vers zéro, le gradient de pression dans la couche limite transformée s'annule, car alors  $u_e^* = u_r$ . On aura alors:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \int_0^x \frac{\mu_r \theta_t}{\mu_t \theta_r} \cdot \frac{p_e}{p_t} \cdot \frac{u_e}{u_r} \left(\frac{R}{L}\right)^{2j} dx, \\ y^* &= \left(\frac{R}{L}\right)^j \frac{u_e}{u_r} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} dy. \end{aligned} \right\} (102)$$

L'indice  $j$  est égal à 0 pour un obstacle bidimensionnel et à 1 pour un obstacle de révolution. Lest une longueur de référence.

La densité de flux de chaleur à la paroi sera égale à:

$$\Phi_p(x) = \frac{\mu_r \rho_r R^j u_e (h_{\text{eff}} - h_p) Y'_0(0, 1; Pr; 0)}{Pr [2 \int_0^x R^{2j} \mu_r \rho_r u_e dx]^{1/2}}, (103)$$

L'enthalpie de référence est donnée par la formule approchée:

$$\begin{aligned} h_r &= h_e + a(0, 1; Pr) (h_p - h_e) \\ &\quad + b(0, 1; Pr) (h_f - h_e), \end{aligned} (104)$$

avec

$$a(0, 1; Pr) = \int_0^\infty Y_0(0, 1; Pr; \eta^*) f'(0, 1; Pr; \eta^*) d\eta^* \quad (105)$$

et

$$b(0, 1; Pr) = 2 \frac{Pr}{r_h} \int_0^\infty f'' d\eta^* \int_{\eta^*}^\infty f'' Pr d\eta^* \int \eta^* f''^{2-Pr} d\eta^* - a(0, 1; Pr). \quad (106)$$

$h_f$  est l'enthalpie de frottement qui est égale à :

$$h_f = h_t + (r_h - 1) \frac{u_\infty^2(x)}{2}, \quad (107)$$

avec

$$r_h = 2Pr \int_0^\infty f'' Pr d\eta^* \int_{\eta^*}^\infty f''^{2-Pr} d\eta^*. \quad (108)$$

Les courbes représentant les variations de  $a(0, 1; Pr)$  et de  $b(0, 1; Pr)$  en fonction de  $Pr$  sont portées sur la Fig. 13.

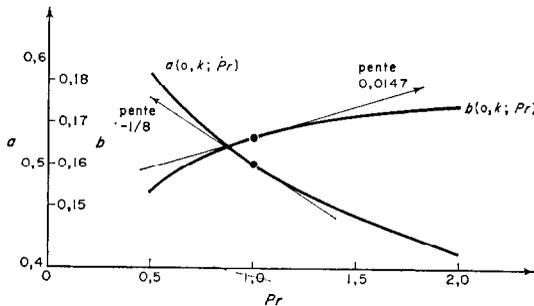


FIG. 13. Plaque plane.

L'enthalpie effective  $h_{\text{eff}}(x)$ , introduite dans (103), sera calculée en considérant, comme au paragraphe 1.5.2, la convection sur une plaque plane où l'enthalpie pariétale est égale à  $h_p - h_f(x)$ . Si nous utilisons la méthode de la Réf. 11 :

$$h_{\text{eff}_1} = h_t + \frac{r_1(Pr) - 1}{2} x^{*1/4} \int_0^{**} (x^{*3/4} - x^{*3/4})^{-1/3} d[u_e^2(x^{*'})]. \quad (109)$$

La formule (103) diffère de la formule de Lees [21] en ce que l'on a choisi l'enthalpie de référence  $h_r$  donnée par (104) au lieu de  $h_o$ , et

l'enthalpie effective  $h_{\text{eff}}$  donnée par (109) au lieu de  $h_t$ .

Eckert et Tewfik [27] ont obtenu un bon accord avec les résultats expérimentaux dans l'air de Kemp *et al.* [28] en utilisant la formule de Lees avec l'enthalpie de référence d'Eckert [6], voisine de celle donnée par (104), et  $h_f$  comme enthalpie effective.

### CONCLUSION

La transformation présentée ici permet de ramener, moyennant certaines simplifications, les équations de la couche limite dans un gaz parfait aux équations dans une couche limite fictive à viscosité et masse volumique constantes, mais à  $c_p$  variable. Dans cette couche limite fictive, la distribution de vitesse extérieure  $u_e^*(x^*)$  dépend de la distribution réelle de la température pariétale  $\theta_p(x)$  sur l'obstacle.

On peut donc appliquer, dans le cas des propriétés physiques variables, toutes les méthodes mises au point pour la couche limite à propriétés physiques constantes. Les résultats obtenus, dans certains cas particuliers, concordent remarquablement avec ceux obtenus par d'autres auteurs qui ont intégré les équations non simplifiées, tout au moins dans la zone où  $0,5 < (\theta_p/\theta_t) < 2$ . Lorsque  $0 < (\theta_p/\theta_t) < 0,5$ , l'erreur croît au fur et à mesure que  $\theta_p$  est plus faible et que le gradient de pression est plus élevé, tout en restant inférieure à 7,3 pour cent, pour le point d'arrêt bidimensionnel et  $Pr = 1$ , par exemple.

Lorsque la température de la paroi est faible devant la température totale, la densité de flux de chaleur à la paroi d'un obstacle quelconque est donnée par une formule différant légèrement de celle de Lees.

Cet article constitue le développement d'une partie de ma thèse préparée sous la direction du Professeur Edmond A. Brun, que je remercie pour les conseils et l'encouragement que j'ai trouvés auprès de lui.

### BIBLIOGRAPHIE

1. A. A. DORODNITZIN, Couche limite laminaire dans un gaz compressible (en russe), *Prikl. Matem. I Mekh.* 6 (1942).
2. L. HOWARTH, Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation, *Proc. Roy. Soc. A* 194, 16 (1948).

3. K. STEWARTSON, Correlated incompressible and compressible boundary layers, *Proc. Roy. Soc. A* **200**, 84 (1949).
4. C. R. ILLINGWORTH, Steady flow in the laminar boundary layer of a gas, *Proc. Roy. Soc. A* **199**, 533 (1949).
5. R. VON MISES, Bemerkungen zur hydrodynamik, *Z. Angew. Math. Mech.* **7**, 425 (1927).
6. E. R. G. ECKERT, Engineering relations for heat transfer and friction in high-velocity laminar and turbulent boundary layer flow over surfaces with constant pressure and temperature, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs*, **78**, 1273 (1956).
7. R. J. MONAGHAN, On the behaviour of boundary layers at supersonic speeds, I.A.S. Preprint No. 557 (1955).
8. E. A. BRUN, *Introduction à l'étude de la couche limite*, pp. 140 à 148, Gauthier-Villars, Paris (1955).
9. H. GÖRTLER, A new series for the calculation of steady boundary layer flows, *J. Math. Mech.* **1**, 1 (1957).
10. B. LE FUR, Une nouvelle méthode de résolution par itération des équations dynamique et thermique de la couche limite laminaire, Thèse de Doctorat, Paris (1960), à paraître dans les P.S.T. du Min de l'Air.
11. B. LE FUR, Convection de la chaleur en régime laminaire dans le cas d'un gradient de pression et d'une température de paroi quelconques, le fluide étant à propriétés physiques constantes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **1**, Nos. 1/2, 68 (1960).
12. E. ECKERT, Die Berechnung des Wärmeüberganges in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper, *Forschungsh. Ver. Dtsch. Ing.* Nr. 416 (1942).
13. E. BRUN et M. VASSEUR, Contribution à l'étude thermique de la couche limite laminaire, *J. Rech. Cen. Nat. Rech. Sci.* No. 6 (1948).
14. H. J. MERK, Rapid calculations for boundary layer transfer using wedge solutions and asymptotic expansions, *J. Fluid Mech.* **5**, 460 (1959).
15. N. ROTT, Compressible laminar boundary layer on a heat-insulated body, *J. Aero. Sci.* **20**, 67 (1953).
16. I. TANI, On the approximate solution of the laminar boundary layer equations, *J. Aero. Sci.* **21**, 487 (1954).
17. B. LE FUR, Calcul de la couche limite laminaire dans un écoulement compressible avec gradient de pression sur une paroi thermiquement isolée, *J. Rech. Cen. Nat. Rech. Sci.* No. 42, 9 (1958).
18. C. B. COHEN et E. RESHOTKO, Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient, *N.A.C.A. Rep.* 1293 (1956).
19. A. M. O. SMITH, Improved solutions of the Falkner and Skan boundary layer equation, *Inst. Aero. Sci. S.M. Fairc. Fund. Pap.* FF-10 (1954).
20. H. GÖRTLER, Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten, *D.V.L. Bericht*, Nr. 34 (1957).
21. L. LEES, Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds, *Jet Propulsion*, **26**, 259 (1956).
22. W. MANGLER, Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten, *Z. Angew. Math. Mech.* **28**, 97 (1948).
23. E. RESHOTKO et C. B. COHEN, Heat transfer at the forward stagnation point of blunt bodies, *N.A.C.A. Tech. Note* 3513 (1955).
24. voir S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vol. II, p. 631, Clarendon Press, Oxford (1938).
25. E. BRUN et M. VASSEUR, Convection forcée de la chaleur à la surface d'un corps de révolution, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **225**, 861 (1947).
26. L. E. KALIKHMAN, Heat exchange in the vicinity of the forward stagnation point in axially symmetrical and two-dimensional gas flow (in Russian), *Izv. Akad. Nauk O.T.N.* 8 (1955).
27. E. R. G. ECKERT et O. E. TEWFIK, Use of reference enthalpy in specifying the laminar heat transfer distribution around blunt bodies in dissociated air, *J. Aero. Space Sci.* **27**, 464 (1960).
28. N. H. KEMP, P. H. ROSE et R. W. DETRA, Laminar heat transfer around blunt bodies in dissociated air, *J. Aero. Space Sci.* **26**, 421 (1959).